

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1953 - 016

Over de afgeleide van $f(x) = x^k(1-x)^m$

C.G. Lekkerkerker



1953

Over de afgeleide van $f(x) = x^k(1-x)^m$

door C.G. Lekkerkerker.

Gegeven twee natuurlijke getallen k en m met $k > m$ en de functie $f(x) = x^k(1-x)^m$ ($0 < x < 1$). Deze functie heeft een maximum in het punt $x_0 = \frac{k}{k+m}$ en is stijgend voor $0 < x < x_0$ en dalend voor $x_0 < x < 1$. Door de afdeling Statistiek werd ons de volgende vraag voorgelegd. Indien x_1 en x_2 twee getallen zijn met

$$(1) \quad 0 < x_1 < x_2 < 1, \quad f(x_1) = f(x_2),$$

is dan voldaan aan de ongelijkheid

$$(2) \quad f'(x_1) < -f'(x_2).$$

Het blijkt dat deze vraag bevestigend beantwoord moet worden, ook indien k en m willekeurige positieve getallen zijn met $k > m$. Bewijs. Stel

$$(3) \quad \frac{k}{m} = t, \quad \frac{1-x_1}{1-x_2} = \alpha, \quad \frac{x_2}{x_1} = \beta.$$

Dan geldt

$$t > 1, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1.$$

Uit (1) volgt

$$x_1^k (1-x_1)^m = x_2^k (1-x_2)^m,$$

ofwel

$$(4) \quad \alpha = \beta^t.$$

$$\text{Wegens } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} - \frac{m}{1-x}$$

is (2) gelijkwaardig met

$$k\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) < m\left(\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2}\right),$$

ofwel

$$\frac{k}{m} < \frac{x_1}{1-x_1} \cdot \frac{1 + \frac{1-x_1}{1-x_2}}{1 + \frac{x_1}{x_2}}$$

Uit de laatste twee betrekkingen (3) kunnen we x_2 elimineren en daarna

$\frac{x_1}{1-x_1}$ uitdrukken in α en β . En wel vinden we

$$1-x_1 = \alpha(1-\beta x_1),$$

$$\text{dus} \quad x_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta},$$

dus
$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\beta}.$$

Bijgevolg is (2) gelijkwaardig met

$$t < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{1-\beta} \cdot \frac{1+\alpha}{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2-1}{\beta^2-1}.$$

Letten we op (4), dan zien we dat bewezen moet worden

$$t < \beta^{1-t} \cdot \frac{\beta^{2t}-1}{\beta^2-1},$$

ofwel

(5)
$$\beta - \frac{1}{\beta} < \frac{\beta^t - \beta^{-t}}{t}.$$

Voor $x > 0$ neemt $\frac{\text{sh } x}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ monotoon toe met x .

Hetzelfde geldt voor

$$\frac{\text{sh } cx}{x} = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2x},$$

als c een positieve constante is. Wegens $\beta > 1$ mogen we kiezen $c = \log \beta$. Derhalve is het rechterlid van (5) een monotoon toenevende functie van t . Daar voor $t=1$ beide leden van (5) aan elkaar gelijk zijn, is hiermee bewezen dat aan (5) is voldaan voor alle waarden van β en t met $\beta > 1$, $t > 1$. Daarmee is de bewering aangetoond.